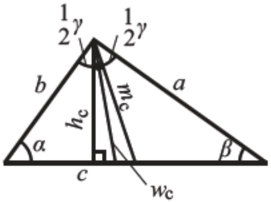
Ympäri piirretyn ympyrän säde *R*

$$R = \frac{a}{2\sin\alpha} = \frac{b}{2\sin\beta} = \frac{c}{2\sin\gamma} = \frac{abc}{4\sqrt{p(p \quad a)(p \quad b)(p \quad c)}}$$

Sisään piirretyn ympyrän säde *r*

$$r = \frac{2A}{a+b+c} = \frac{A}{p} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$



Korkeusjana h_c

$$h_c = \frac{ab}{2R} = \frac{2A}{c} = b\sin\alpha = a\sin\beta$$

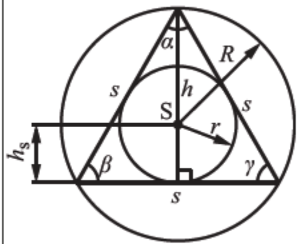
Keskijana m_c

$$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}$$

Kulman γ puolittaja w_c

$$w_c = \frac{2}{a+b}\sqrt{abp(p \quad c)} = \frac{1}{a+b}\sqrt{ab(a+b+c)(a+b \quad c)}$$

2. Tasasivuinen kolmio



$$\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$$

$$A = s^2\frac{\sqrt{3}}{4}$$

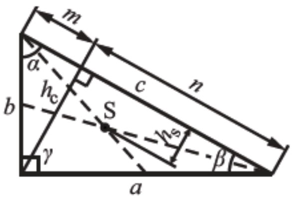
$$R = s\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$h_s = \frac{h}{3} = s\frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$r = s\frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$h = s\frac{\sqrt{3}}{2}$$

3. Suorakulmainen kolmio



Pythagoraan lause

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$a = \sqrt{(c+b)(c-b)}$$

$$r = \frac{ab}{a+b+c}$$

$$m = b^2 / c$$

$h_s = h_c / 3$

$\alpha + \beta = \gamma = 90^\circ$

$h_c = ab / c$

c = hypotenuusa

a, b = kateetti

r = sisään piirretyn ympyrän säde

$A = ab / 2$

$R = c / 2$

$n = a^2 / c$

3. $y = \arctan x \;\Leftrightarrow\; \tan y = x$

Määritysjoukko: **R**

Arvojoukko: $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$

4. $y = \operatorname{arccot} x \;\Leftrightarrow\; \cot y = x$

Määritysjoukko: **R**

Arvojoukko: $]0, \pi[$

Arkusfunktioiden kaavoja

$$x = \arccos\sqrt{1-x^2} = \arctan\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},\quad 0 \le x < 1$$

$$x = -\arccos\sqrt{1-x^2} = \arctan\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},\quad -1 < x < 0$$

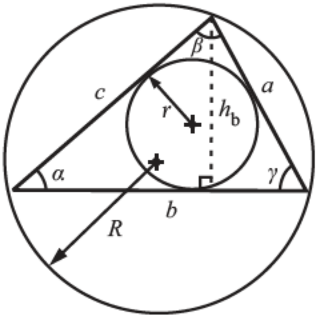
$$\arccos x = \arcsin\sqrt{1-x^2} = \arctan\frac{\sqrt{1-x^2}}{x},\quad 0 < x \le 1$$

$$\arccos x = \pi - \arcsin\sqrt{1-x^2} = \pi + \arctan\frac{\sqrt{1-x^2}}{x},\quad -1 \le x < 0$$

$$\arctan x = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \arccos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}},\quad x \ge 0$$

$$\arctan x = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = -\arccos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}},\quad x < 0$$

5.6 Tasokolmioiden trigonometriaa



Kuvion merkinnät

a, b, c = kolmion sivut

α, β, γ = vastaavat kulmat

$s = 1/2 \cdot (a+b+c)$ = piirin puolikas

A = kolmion ala

h_b = sivun b vastainen korkeus

r = kolmion sisään piirretyn ympyrän säde

R = kolmion ympäri piirretyn ympyrän säde

Trigonometrisia kaavoja

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

Sinilause

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Kosinilause

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

Tangenttilause

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan\frac{\alpha+\beta}{2}}{\tan\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

Heronin kaava

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

4. Matriisin kertominen luvulla

Matriisi $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ kerrotaan luvulla k siten, että jokainen alkio kerrotaan tällä luvulla:

$$k\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}k = (ka_{ij})$$

5. Matriisin transponointi

Matriisin $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m \times n}$ transpoosi $\boldsymbol{A}^{\mathbf{T}}$ on:

$$\boldsymbol{A}^{\mathbf{T}} = (b_{ij})_{n \times m}, \text{ missä } b_{ij} = a_{ji}.$$

Pystyvektorin transpoosi on vaakavektori ja vaakavektorin transpoosi on pystyvektori:

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{x}^{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$$

6. Symmetrinen neliömatriisi

Neliömatriisi $\boldsymbol{A}$ on *symmetrinen*, jos $\boldsymbol{A}^{\mathbf{T}} = \boldsymbol{A}$. Symmetrisen matriisin alkioille pätee $a_{ij} = a_{ji}$ kaikilla i ja j.

16.4 Matriisien laskutoimitusten ominaisuuksia

Summa ja erotus

$$\boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{C}$$
$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}$$
$$\boldsymbol{A} \pm \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$$
$$\boldsymbol{0} - \boldsymbol{A} = -\boldsymbol{A}$$
$$\boldsymbol{A} + (-\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{0}$$
$$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} + (-\boldsymbol{B})$$
$$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$$

Huom. Liitäntälakien perusteella summa $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}$ voidaan kirjoittaa myös ilman sulkuja.

Vakiolla kertominen (*k* ja *p* vakioita)

$$k(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = k\boldsymbol{A} + k\boldsymbol{B}$$
$$(k + p)\boldsymbol{A} = k\boldsymbol{A} + p\boldsymbol{A}$$
$$k(p\boldsymbol{A}) = (kp)\boldsymbol{A}$$
$$k(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) = (k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B})$$
$$(1 + k)\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} + k\boldsymbol{A}$$
$$1\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$$

Matriisitulo

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{C})$$
$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$$
$$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{C} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{C}$$
$$\boldsymbol{I}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{I} = \boldsymbol{A}$$
$$\boldsymbol{A}\mathbf{0} = \mathbf{0}\boldsymbol{A} = \mathbf{0}$$

Huom. 1: Matriisitulo ei ole vaihdannainen eli yleensä $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$.

Huom. 2: Jos joillekin matriiseille $\boldsymbol{A}$ ja $\boldsymbol{B}$ pätee $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$, niin matriisien sanotaan *kommutoivan*.

Huom. 3: Matriisitulo voi olla nolla eli $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$, vaikka $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{0}$ ja $\boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{0}$.

Huom. 4: $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}$ voidaan kirjoittaa myös ilman sulkuja.

Transpoosin säännöt

$$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})^{\mathbf{T}} = \boldsymbol{A}^{\mathbf{T}} + \boldsymbol{B}^{\mathbf{T}}$$
$$(k\,\boldsymbol{A})^{\mathbf{T}} = k\boldsymbol{A}^{\mathbf{T}}; \qquad k = \text{vakio}$$
$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathbf{T}} = \boldsymbol{B}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{A}^{\mathbf{T}}$$
$$(\boldsymbol{A}^{\mathbf{T}})^{\mathbf{T}} = \boldsymbol{A}$$
$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C})^{\mathbf{T}} = \boldsymbol{C}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{B}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{A}^{\mathbf{T}}$$
$$\det(\boldsymbol{A}^{\mathbf{T}}) = \det \boldsymbol{A}$$