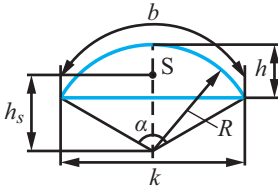


## 16. Ympyrän segmentti



$$h = R[1 - \cos(\alpha/2)]$$

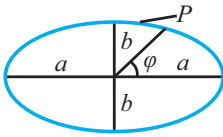
$$A = \frac{R^2(\alpha - \sin\alpha)}{2} = \frac{b \cdot R - k(R - h)}{2}$$

$$R = \frac{k^2 + 4h^2}{8h} = \frac{h}{2} + \frac{k^2}{8h}$$

$$\alpha = 4 \arctan(2h/k)$$

$$(\alpha \text{ radiaaneina}) \quad h_s = \frac{k^3}{12A} = \frac{4R \sin^3(\alpha/2)}{3(\alpha - \sin\alpha)}$$

## 17. Ellipsi



Kehän pituus  $P$  saadaan elliptisenä integraalina:

$$P = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi} \cdot d\varphi; \quad e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

$$A = \pi ab$$

Katso kohta 6.8

$e$  = eksentrisyys

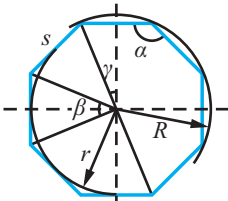
**Ellipsin kehän pituus  $P$  (neljän desimaalin tarkkuudella)**

**$P = k \times a$**

$b : a$	$k$	$b : a$	$k$	$b : a$	$k$	$b : a$	$k$	$b : a$	$k$	$b : a$	$k$	$b : a$	$k$
0,00	4,0000	0,15	4,1261	0,30	4,3859	0,45	4,7207	0,60	5,1054	0,75	5,5258	0,90	5,9732
01	0011	16	1403	31	4062	46	7450	61	1324	76	5549	91	6,0038
02	0038	17	1550	32	4269	47	7695	62	1596	77	5841	92	0345
03	0078	18	1702	33	4479	48	7942	63	1870	78	6134	93	0653
04	0131	19	1859	34	4692	49	8191	64	2145	79	6428	94	0962
0,05	4,0194	0,20	4,2020	0,35	4,4908	0,50	4,8442	0,65	5,2421	0,80	5,6723	0,95	6,1271
06	0267	21	2186	36	5126	51	8695	66	2699	81	7020	96	1582
07	0348	22	2356	37	5347	52	8950	67	2978	82	7317	97	1893
08	0438	23	2531	38	5571	53	9207	68	3259	83	7615	98	2205
09	0535	24	2710	39	5797	54	9466	69	3541	84	7915	99	2518
0,10	4,0640	0,25	4,2892	0,40	4,6026	0,55	4,9726	0,70	5,3824	0,85	5,8215		
11	0752	26	3078	41	6258	56	9988	71	4108	86	8516		
12	0870	27	3268	42	6492	57	5,0252	72	4394	87	8819		
13	0994	28	3462	43	6728	58	0518	73	4681	88	9122		
14	1125	29	3659	44	6966	59	0785	74	4969	89	9426		

**Esimerkki:**  $a = 2500$  mm;  $b = 1250$  mm;  $b/a = 0,5$ ;  $P \approx 4,8442 \times 2500$  mm = **12110,5 mm**

## 18. Säännöllinen monikulmio



$$\gamma = \beta/2 = 180^\circ/n$$

$$R = \frac{s}{2 \sin \gamma} = \sqrt{r^2 + (s^2/4)}$$

$$\alpha = \frac{n-2}{n} 180^\circ$$

$$r = \frac{s}{2 \tan \gamma} = \sqrt{R^2 - (s^2/4)}$$

$$s = 2R \sin \gamma = 2r \tan \gamma$$

$$P = n \cdot s$$

$$A = \frac{ns^2}{4 \tan \gamma} = \frac{nR^2}{2} \sin \beta$$

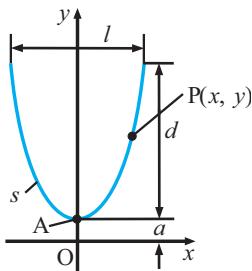
$n$  = kulmien lukumäärä

$r$  = sisään piirretyn ympyrän säde

$R$  = ympäri piirretyn ympyrän säde

## 7. Erikoiskäyriä

### 7.1 Ketjuviiva



$$y = \frac{a}{2} \left( e^{x/a} + e^{-(x/a)} \right) = a \cosh \frac{x}{a}; \quad a > 0$$

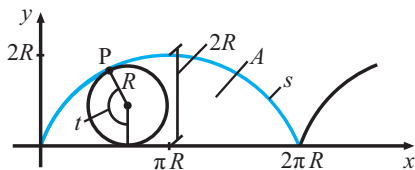
$$a \sinh \frac{x}{a} = a \frac{e^{x/a} - e^{-(x/a)}}{2} = \text{kaaren AP pituus}$$

$$s \approx l \left[ 1 + \frac{2}{3} \left( \frac{2d}{l} \right)^2 \right] = \text{kaaren pituus } (d < l)$$

$$\rho = a \cosh^2 \frac{x}{a} = \text{kaarevuussäde pisteessä P}$$

### 7.2 Sykloidi

Suoraa pitkin pyörivän ympyrän kehäpisteen ura.



$$x = R(t - \sin t) \quad (-\infty < t < \infty)$$

$$y = R(1 - \cos t)$$

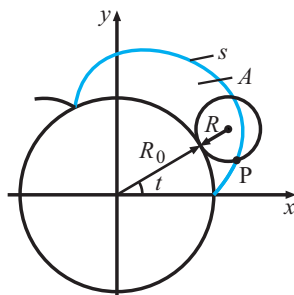
$$A = 3\pi R^2 = \text{kaaren ja } x\text{-akselin rajaama pinta-ala}$$

$$s = 8R = \text{kaaren pituus}$$

$$\rho = 4R \sin \frac{t}{2} = \text{kaarevuussäde}$$

### 7.3 Episykloidi

Ympyrän ulkokehää pitkin pyörivän ympyrän kehäpisteen ura.



$$x = (R_0 + R) \cos t - R \cdot \cos \left( \frac{R_0 + R}{R} \cdot t \right)$$

$$y = (R_0 + R) \sin t - R \cdot \sin \left( \frac{R_0 + R}{R} \cdot t \right)$$

$$(-\infty < t < \infty)$$

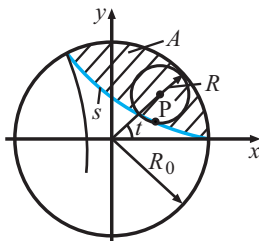
$$A = \frac{\pi R^2 (3R_0 + 2R)}{R_0} = \text{pinta-ala}$$

$$s = \frac{8R(R_0 + R)}{R_0} = \text{kaaren pituus}$$

$$\rho = \frac{4R(R_0 + R)}{2R + R_0} \sin \frac{R_0 t}{2R} = \text{kaarevuussäde}$$

### 7.4 Hyposykloidi

Ympyrän sisäkehää pitkin pyörivän ympyrän kehäpisteen ura.



## Kaavojen yhdistäminen

### Tasaisesti kiihtyvä liike

$$v = v_0 + at \quad s = v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

$$s = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} \quad v = \sqrt{v_0^2 + 2as}$$

### Tasaisesti hidastuva liike

$$v = v_0 - at \quad s = v_0 t - \frac{at^2}{2}$$

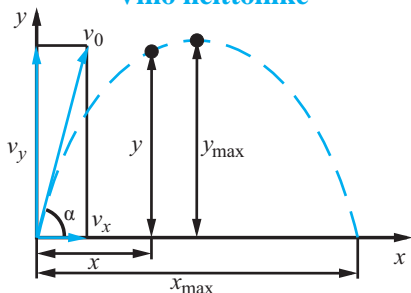
$$s = \frac{v_0^2 - v^2}{2a} \quad v = \sqrt{v_0^2 - 2as}$$

### Alkunopeus $v_0 = 0$

$$v = at \quad s = \frac{at^2}{2} \quad s = \frac{v^2}{2a}$$

## 1.3 Heittoliike

### Vino heittoliike



### Nopeuden komponentit hetkellä $t$

$$v_x = v_0 \cos \alpha$$

$$v_y = v_0 \sin \alpha - gt$$

### Kappaleen paikka hetkellä $t$

$$x = v_0 \cos \alpha \cdot t$$

$$y = v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$$

### Heittoparaabelin yhtälö

$$y = x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}$$

### Kappaleen nopeus hetkellä $t$

$$v = \sqrt{v_0^2 - gt(2v_0 \sin \alpha - gt)}$$

### Kappaleen nousukorkeus

$$y_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

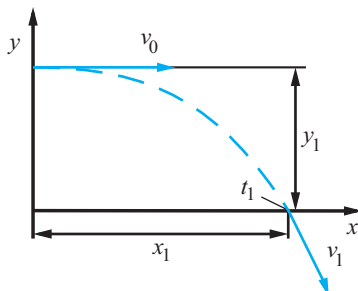
### Kappaleen nousuaika maksimikorkeuteen $y_{\max}$

$$t = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$$

### Kappaleen kantama

$$x_{\max} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

### Vaakasuora heittoliike



### Paikassa $(x_1, y_1)$

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 + (gt_1)^2}$$

$$y_1 = \frac{1}{2}gt_1^2 = \frac{g}{2v_0^2} \cdot x_1^2$$

$$x_1 = v_0 t_1 = v_0 \sqrt{\frac{2y_1}{g}}$$

**Amplitudi pienenee**

$$Y = Y_0 e^{-\delta \cdot t} = Y_0 e^{-t/\tau}$$

**Aikavakio**  $\tau = \frac{2m}{\beta}$

**Vaimennussuhde**  $C = e^{\delta \cdot T_1}$

**Energia jakson alussa = E**

**Energiamuutos jakson aikana =  $\Delta E$**

**Laatukerroin**

$$Q = 2\pi \frac{E}{|\Delta E|} \quad Q = \frac{\omega_0 m}{\beta} = \frac{\omega_0 \tau}{2}$$

**Pakkovärähtely****Liikkeyhtälö**

$$m\ddot{y} + \beta\dot{y} + ky = F_0 \sin(\omega t)$$

**Pakkovoima**

$$F = F_0 \sin(\omega t)$$

**Liikkeyhtälön yksittäisratkaisu**

$$y = Y \sin(2\pi ft - \varphi)$$

**Värähtelyn amplitudi**

$$Y = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + \omega^2 \beta^2}}$$

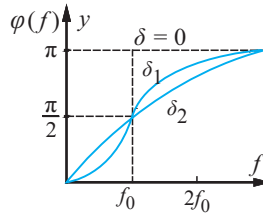
$$Y = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}}$$

**Vaimennuskertoin**

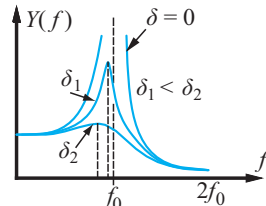
$$\delta = \frac{\beta}{2m}$$

**Ominaiskulmataajuus**

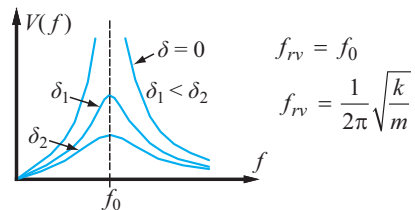
$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

**Poikkeaman  $y$  ja pakkovoiman  $F$  välinen vaihe-ero  $\varphi$  taaajuuden funktiona**

$$\varphi = \arctan \frac{\omega \beta}{k - m\omega^2}$$

**Amplitudi taaajuuden funktiona****Amplitudiresonanssi**

$$f_{rA} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\beta^2}{2m^2}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$$

**Nopeuden huippuarvo taaajuuden funktiona**

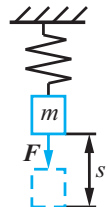
$$f_{rv} = f_0$$

$$f_{rv} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

**Harmoninen voima ja värähdysliike**

$$F = ks \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$f = \frac{1}{T}$$



<p><b>16. Liuoksen happamuus</b></p> <p>pH – arvo:  <math>\text{pH} = -\log_{10}[\text{H}_3\text{O}^+]</math>  <math>[\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-\text{pH}}</math></p> <p>pOH – arvo:  <math>\text{pOH} = -\log_{10}[\text{OH}^-]</math>  <math>\text{p}K_w = \text{pH} + \text{pOH}</math></p>	<p><b>22. Emäsvakio <math>K_b</math></b></p> <p>Reaktiolle:  <math>\text{H}_2\text{O} + \text{B} \rightleftharpoons \text{OH}^- + \text{HB}^+</math>  <math display="block">K_b = \frac{[\text{OH}^-] \cdot [\text{HB}^+]}{[\text{B}]}</math>  <math>\text{p}K_b = -\lg(K_b)</math></p>
<p><b>17. Veden ionitulo</b></p> <p><math>K_w = [\text{H}_3\text{O}^+][\text{OH}^-]</math></p> <p><math>[\text{H}_3\text{O}^+]</math> = oksoniumionikonsentraatio  <math>[\text{OH}^-]</math> = hydroksidi-ionikonsentraatio</p> <p><math>\text{p}K_w = -\lg(K_w)</math> (14, kun <math>T = 298,15 \text{ K}</math>)</p>	<p><b>23. Likimääräiset laskentakaavat pH – arvoille</b></p> <p>Vahva happo HA:  <math>\text{pH} = -\lg[\text{HA}]</math>  <math>[\text{HA}]</math> = hapon alkupitoisuus ennen dissosioitumista</p> <p>Heikko happo HA:  <math>\text{pH} = 1/2(\text{p}K_a - \lg [\text{HA}])</math></p>
<p><b>18. Liukoisuustulo</b></p> <p>Suolan liukoisuustulo:  <math>A_a B_b(s) \rightleftharpoons a A_{(aq)}^{m+} + b B_{(aq)}^{n-}</math></p> <p>Liukoisuustulo laimeissa liuksissa:  <math>K_s = [A^{m+}]^a \cdot [B^{n-}]^b</math></p>	<p><b>24. Henderson – Hasselbach –yhtälö</b></p> <p>Heikon hapon HA ja sitä vastaavan emäksen <math>A^-</math> puskuriliuoksen pH– arvo:  <math display="block">\text{pH} = \text{p}K_a + \lg\left(\frac{[A^-]}{[\text{HA}^-]}\right)</math></p>
<p><b>19. Keskireaktionopeus homogeeniselle reaktiolle <math>A \rightarrow Z</math></b></p> <p><math display="block">\bar{v} = -\frac{\Delta[A]}{\Delta t} = +\frac{\Delta[Z]}{\Delta t}</math></p> <p><math>\bar{v}</math> = keskimääräinen reaktionopeus aikavälillä <math>\Delta t</math>  <math>\Delta[X]</math> = aineen <math>X</math> konsentraation muutos aikavälillä <math>\Delta t</math></p>	<p><b>25. Nernstin yhtälö reaktiolle</b></p> <p>Reaktio:  <math>a A + b B \rightleftharpoons p P + r R</math></p> <p>Yhtälö:  <math>E(\text{kkenno}) = E^0(\text{kkenno}) - \frac{RT}{zF} \cdot \ln\left(\frac{[\text{P}]^p [\text{R}]^r}{[\text{A}]^a [\text{B}]^b}\right)</math></p> <p><math>E(\text{kkenno})</math> = kennon tasapainopotentiaali  <math>E^0(\text{kkenno})</math> = kennon lähdejännite perustilassa  <math>R</math> = yleinen kaasuvakio  <math>T</math> = lämpötila  <math>z</math> = reaktiossa siirtyvien elektronien määrä  <math>F</math> = Faradayn vakio</p>
<p><b>20. Happovakio <math>K_a</math></b></p> <p>Reaktiolle:  <math>\text{HA} + \text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons \text{A}^- + \text{H}_3\text{O}^+</math>  <math display="block">K_a = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+] \cdot [\text{A}^-]}{[\text{HA}]}</math>  <math>\text{p}K_a = -\lg(K_a)</math></p>	
<p><b>21. Happo – emäspari</b></p> <p><math>K_w = K_a \cdot K_b \quad \text{p}K_w = \text{p}K_a + \text{p}K_b</math></p>	

# 8. Epäorgaanisten yhdisteiden ominaisuuksia

Taulukon sarakkeiden selitys (25 °C, 1 atm)

1. **Kaava**; sulkeissa tilamerkinnyt (s = kiinteä; l = neste; g = kaasu; aq = ideaalinen vesiliuos)
2.  $\Delta H_f^\circ$  (kJ/mol) = moolinen standardinen muodostumisenentalpia
3.  $\Delta G_f^\circ$  (kJ/mol) = moolinen standardinen muodostumisen Gibbsin energia
4.  $C_p^\circ$  (J/(K · mol)) = moolinen lämpökapasiteetti
5.  $S^\circ$  (J/(K · mol)) = moolinen standardientropia

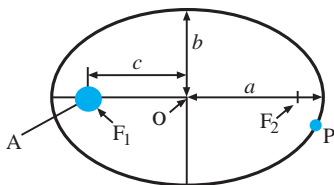
1. Kaava	2. $\Delta H_f^\circ$ kJ/mol	3. $\Delta G_f^\circ$ kJ/mol	4. $C_p^\circ$ J/(K·mol)	5. $S^\circ$ J/(K·mol)
<b>Alumiini</b>				
Al(s)	0	0	24,4	28,3
Al <sup>3+</sup> (aq)	-524,7	-481,2	-	-321,7
Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> (s)	-1675,7	-1582,3	79,0	50,9
Al(OH) <sub>3</sub> (s)	-1276	-	-	-
AlCl <sub>3</sub> (s)	-704,2	-628,8	91,8	110,7
<b>Antimoni</b>				
Sb(s)	0	0	25,2	45,7
SbH <sub>3</sub> (g)	+145,1	+147,8	41,1	232,8
SbCl <sub>3</sub> (g)	-313,8	-301,2	76,7	337,8
SbCl <sub>5</sub> (g)	-394,3	-334,3	121,1	401,9
<b>Arseeni</b>				
As(s), harmaa	0	0	24,6	35,1
As <sub>2</sub> S <sub>3</sub> (s)	-169,0	-168,6	116,3	163,6
AsO <sub>4</sub> <sup>3-</sup> (aq)	-888,1	-648,4	-	-162,8
<b>Barium</b>				
Ba(s)	0	0	28,1	62,8
Ba <sup>2+</sup> (aq)	-537,6	-560,8	-	+9,6
BaO(s)	-553,5	-525,1	47,8	70,4
BaCO <sub>3</sub> (s)	-1216,3	-1137,6	85,4	112,1
BaCO <sub>3</sub> (aq)	-1214,8	-1088,6	-	-47,3
<b>Boori</b>				
B(s)	0	0	11,1	5,9
B <sub>2</sub> O <sub>3</sub> (s)	-1272,8	-1193,7	62,9	54,0
BF <sub>3</sub> (g)	-1137,0	-1120,3	50,5	254,1
<b>Bromi</b>				
Br <sub>2</sub> (l)	0	0	75,7	152,2
Br <sub>2</sub> (g)	+30,9	+3,1	36,0	245,5
Br(g)	+111,9	+82,4	20,8	175,0
Br <sup>-</sup> (aq)	-121,6	-104,0	-	+82,4
HBr(g)	-36,4	-53,5	29,1	198,7
<b>Kalsium</b>				
Ca(s)	0	0	25,3	41,4

1. Kaava	2. $\Delta H_f^\circ$ kJ/mol	3. $\Delta G_f^\circ$ kJ/mol	4. $C_p^\circ$ J/(K·mol)	5. $S^\circ$ J/(K·mol)
Ca(g)	+178,2	+144,3	20,8	154,9
Ca <sup>2+</sup> (aq)	-542,8	-553,6	-	-53,1
CaO(s)	-635,1	-604,0	42,8	39,8
Ca(OH) <sub>2</sub> (s)	-986,1	-898,5	87,5	83,4
Ca(OH) <sub>2</sub> (aq)	-1002,8	-868,1	-	-74,5
CaCO <sub>3</sub> (s), kalsiitti	-1206,9	-1128,8	81,9	92,9
CaCO <sub>3</sub> (s), aragoniitti	-1207,1	-1127,8	81,3	88,7
CaCO <sub>3</sub> (aq)	-1220,0	-1081,4	-	-110,0
CaF <sub>2</sub> (s)	-1219,6	-1167,3	67,0	68,9
CaF <sub>2</sub> (aq)	-1208,1	-1111,2	-	-80,8
CaCl <sub>2</sub> (s)	-795,8	-748,1	72,6	104,6
CaCl <sub>2</sub> (aq)	-877,1	-816,0	-	59,8
CaBr <sub>2</sub> (s)	-682,8	-663,6	72,6	130
CaC <sub>2</sub> (s)	-59,8	-64,9	62,7	70,0
CaSO <sub>4</sub> (s)	-1434,1	-1321,8	99,7	106,7
CaSO <sub>4</sub> (aq)	-1452,1	-1298,1	-	-33,1
<b>Hiili</b>				
C(s), grafiitti	0	0	8,5	5,7
C(s), timantti	+1,9	+2,9	6,1	2,4
C(g)	+716,7	+671,3	20,8	158,1
CO(g)	-110,5	-137,2	29,1	197,7
CO <sub>2</sub> (g)	-393,5	-394,4	37,1	213,7
CO <sub>3</sub> <sup>2-</sup> (aq)	-677,1	-527,8	-	-56,9
CCl <sub>4</sub> (l)	-135,4	-65,2	131,8	216,4
CS <sub>2</sub> (l)	+89,7	+65,3	75,7	151,3
HCN(g)	+135,1	+124,7	35,9	201,8
HCN(l)	+108,9	+125,0	70,6	112,8
HCN(aq)	+107,1	+119,7	-	124,7
<b>Cerium</b>				
Ce(s)	0	0	26,9	72,0

# 1. Tähtitieteen kaavoja

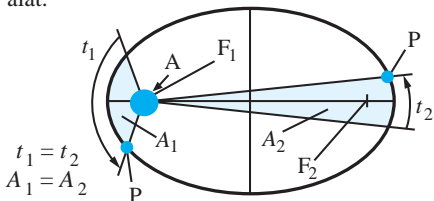
## 1. Keplerin I laki

Planeettojen (P) radat ovat ellipsejä, joiden toisessa polttopisteessä ( $F_1$ ) on Aurinko (A)  $a$  = isoakselin puolikas  
 $b$  = pikkuakselin puolikas  
 $c$  = Auringon etäisyys ellipsin keskipisteestä O  
 $F_1, F_2$  = polttopisteet  
 $e = c / a$  = eksentrisyys  
 $e_{\text{maa}} = 0,0167$  (Maan rata lähes pyöreä)



## 2. Keplerin II laki

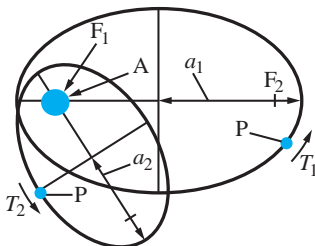
Planeetan Aurinkoon yhdistävä jana pyyhkii yhtä pitkissä ajanjaksoissa yhtä suuret pinta-alat.



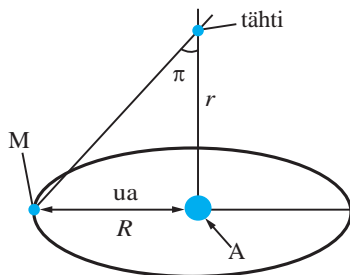
## 3. Keplerin III laki

Planeettojen kiertoaikojen neliöt suhtautuvat toisiinsa kuten niiden ellipsiratojen isoakselien puolikkaiden kuutiot.

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$$



## 4. Parallaksi ( $\pi$ ), parsek (pc) ja ua



$R = ua$  (vanha merkintä AU, 2010/10 asti) = Maan radan säde ( $1,496 \cdot 10^{11}$  m)

$\pi$  = parallaksi = kulma, jossa Maan radan säde  $R$  näkyy tähdestä katsottuna

$r$  = tähden etäisyys

pc = parsek = se etäisyys, josta Maan radan säde eli 1 ua:n mittainen jana näkyy yhden kaarisekunnin ( $1''$ ) eli  $1/3600$  asteen kulmassa

1 pc =  $3,086 \cdot 10^{16}$  m

## 5. Tähtien lämpötilan $T$ määrittäminen

$$T = \frac{\delta}{\lambda_{\text{max}}}$$

$T$  = tähden lämpötila (K)

$\lambda_{\text{max}}$  = säteilyn intensiteetin maksimikohtaa vastaava aallonpituus

$\delta$  = Wienin siirtymävakio

=  $2,897769 \cdot 10^{-3}$  m · K

## 6. Kappaleen hetkellinen ratanopeus $v$ Keplerin ellipsiradalla

$$v = \sqrt{GM \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)}$$

$v$  = kappaleen ratanopeus

$M$  = keskuskappaleen massa

$G$  = gravitaatiovakio ( $6,6742 \cdot 10^{-11}$  Nm<sup>2</sup>/kg<sup>2</sup>)

$r$  = kiertävän kappaleen hetkellinen

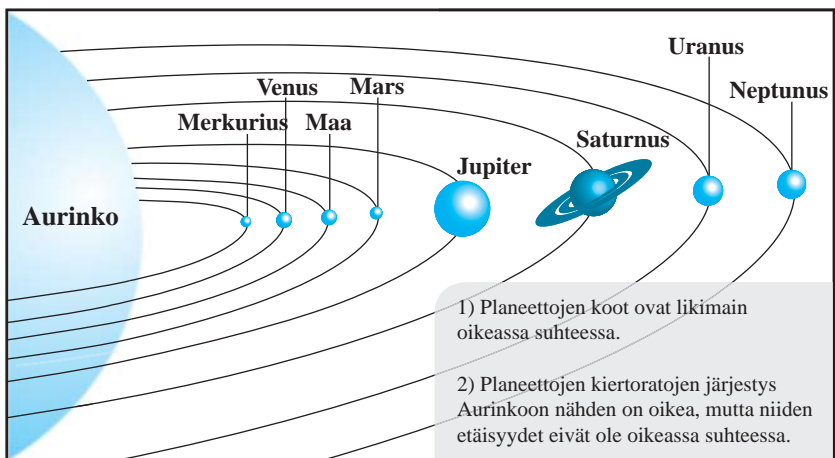
etäisyys keskuskappaleesta

$a$  = ellipsin isoakselin puolikas

## 4. Ajan yksiköitä

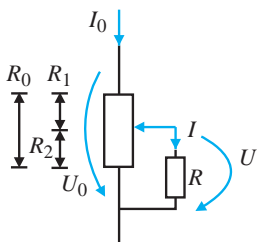
Sideerinen vuosi	365,2564 d (kiintotähtien suhteen)
Trooppinen vuosi	365,2422 d (kevättasauspisteestä seuraavaan)
Anomalistinen vuosi	365,2596 d (perihelistä periheliin)
Gregoriaaninen kalenterivuosi	365,2425 d
Juliaaninen vuosi	365,25 d
Juliaaninen vuosisata	36525 d
Pimennysvuosi	346,6200 d (Kuu nousevien solmujen väli)
Kuuvuosi	354,367 d = 12 synodista kuukautta
Synodinen kuukausi	29,5306 d (uusikuusta uusikuuhun)
Sideerinen kuukausi	27,3217 d (kiintotähtien suhteen)
Trooppinen kuukausi	27,3216 d (kevättasauspisteen suhteen)
Anomalistinen kuukausi	27,5546 d (perigeumista perigeumiin)
Drakoniittinen kuukausi	27,2122 d (nousevasta solmusta seuraavaan)
Keskiaurinkovuorokausi	24 h keskiaurinkoaikaa = 24 h 03 min 56,56 s tähtiäikää = 1,00273791 sideeristä vuorokautta
Sideerinen vuorokausi	24 h tähtiäikää = 23 h 56 min 04,09 s keskiaurinkoaikaa = 0,99726957 keskiaurinkovuorokautta
Maapallon pyöriähdysaika (tähtien suhteen)	1,000 000 097 sideeristä vuorokautta = 23 h 56 min 04,10 s keskiaurinkoaikaa
Astronominen yksikkö, ua (Maan ja Auringon radan keskimääräinen etäisyys)	1 ua = $1,49597870 \times 10^{11}$ m
Parsek, pc	1 pc = $3,0857 \times 10^{16}$ m = 206265 ua = 3,26 ly
Valovuosi, ly	1 ly = $0,9461 \times 10^{16}$ m = 0,3066 pc

## 5. Planeettojen kiertoradat





### 1.11 Jännitteen alennus potentiometrillä



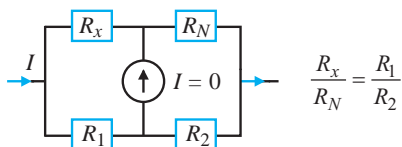
$$U = \frac{RR_0 - RR_1}{R_1R_0 + RR_0 - R_1^2} U_0$$

$$I = \frac{R_0 - R_1}{R_0 + R - R_1} I_0$$

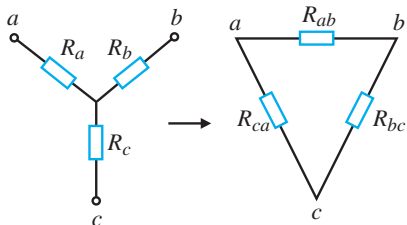
Jos  $R \gg R_0$ , niin  $U = \frac{R_2}{R_0} U_0$  ja  $I = 0$ .

### 1.12 Wheatstonen silta

Tasapainoehto:  $I = 0$



### 1.13 Muunnos tähdestä kolmioon

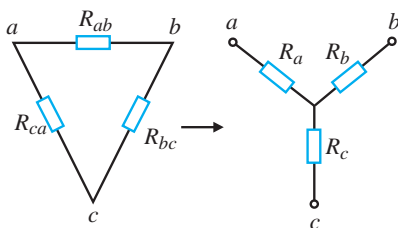


$$R_{ab} = R_a + R_b + \frac{R_a R_b}{R_c}$$

$$R_{bc} = R_b + R_c + \frac{R_b R_c}{R_a}$$

$$R_{ca} = R_c + R_a + \frac{R_c R_a}{R_b}$$

### 1.14 Muunnos kolmiosta tähden

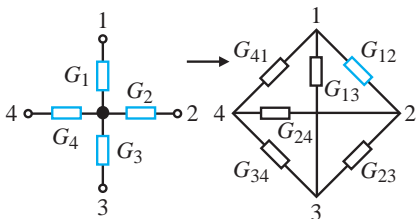


$$R_a = \frac{R_{ab} R_{ca}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}$$

$$R_b = \frac{R_{ab} R_{bc}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}$$

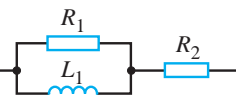
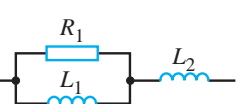
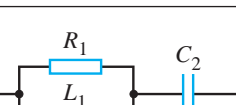
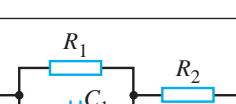


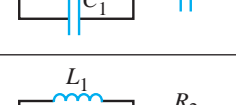

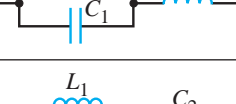
$$R_c = \frac{R_{ca} R_{bc}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}$$

### 1.15 Rosenin teoreema



$$G_{ij} = \frac{G_i G_j}{\Sigma G}; \text{ Esim: } G_{12} = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2 + G_3 + G_4}$$

## 3.3 Sekalainen kytkentä

Kytkenä	Vastus (Impedanssi Z)	
	Komponenttimuoto	Absoluuttinen arvo Z
	$R_2 + \underbrace{\frac{R_1(\omega L_1)^2}{R_1^2 + (\omega L_1)^2}}_{R_{1,2}^*} + j \underbrace{\frac{R_1^2 \omega L_1}{R_1^2 + (\omega L_1)^2}}_{X_1^*}$	$\sqrt{R_{1,2}^{*2} + X_1^{*2}}$
	$\underbrace{\frac{R_1(\omega L_1)^2}{R_1^2 + (\omega L_1)^2}}_{R_1^*} + j \left[ \underbrace{\frac{R_1^2 \omega L_1}{R_1^2 + (\omega L_1)^2}}_{X_{1,2}^*} + \omega L_2 \right]$	$\sqrt{R_1^{*2} + X_{1,2}^{*2}}$
	$\underbrace{\frac{R_1(\omega L_1)^2}{R_1^2 + (\omega L_1)^2}}_{R_1^*} + j \left[ \underbrace{\frac{R_1^2 \omega L_1}{R_1^2 + (\omega L_1)^2}}_{X_{1,2}^*} - \frac{1}{\omega C_2} \right]$	$\sqrt{R_1^{*2} \pm X_{1,2}^{*2}}$
	$\left[ \underbrace{\frac{R_1}{1 + (R_1 \omega C_1)^2}}_{R_{1,2}^*} + R_2 \right] - j \underbrace{\frac{R_1^2 \omega C_1}{1 + (R_1 \omega C_1)^2}}_{X_1^*}$	$\sqrt{R_{1,2}^{*2} + X_1^{*2}}$
	$\underbrace{\frac{R_1}{1 + (R_1 \omega C_1)^2}}_{R_1^*} + j \left[ \underbrace{\omega L_2 - \frac{R_1^2 \omega C_1}{1 + (R_1 \omega C_1)^2}}_{X_{1,2}^*} \right]$	$\sqrt{R_1^{*2} \pm X_{1,2}^{*2}}$
	$\underbrace{\frac{R_1}{1 + (R_1 \omega C_1)^2}}_{R_1^*} + j \left[ \underbrace{\frac{R_1^2 \omega C_1}{1 + (R_1 \omega C_1)^2} + \frac{1}{\omega C_2}}_{X_{1,2}^*} \right]$	$\sqrt{R_1^{*2} + X_{1,2}^{*2}}$
	$R_2 + j \frac{\omega L_1}{1 - \omega^2 L_1 C_1}$	$\sqrt{R_2^2 + \left( \frac{\omega L_1}{1 - \omega^2 L_1 C_1} \right)^2}$
	$j \left[ \frac{\omega L_1}{1 - \omega^2 L_1 C_1} + \omega L_2 \right]$	$\frac{\omega L_1}{1 - \omega^2 L_1 C_1} + \omega L_2$
	$j \left[ \frac{\omega L_1}{1 - \omega^2 L_1 C_1} - \frac{1}{\omega C_2} \right]$	$\frac{\omega L_1}{1 - \omega^2 L_1 C_1} - \frac{1}{\omega C_2}$

## Neutraaliakselin etäisyys $y$

$$y = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2 + y_3 A_3}{A}$$

## Neliömomentti $I_t$

$$I_t = I_1 + I_2 + I_3 + e_1^2 A_1 + e_2^2 A_2 + e_3^2 A_3$$

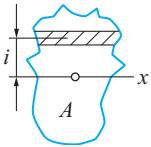
## Neutraaliakselin paikka yleisesti

$$y = \frac{\sum y_n A_n}{A}$$

## Yhdistetyn poikkipinnan neliömomentti yleisesti

$$I_x = \sum (I_n + a_n^2 A_n)$$

## 3.7 Neliöllinen keskisäde



Neliöllistä keskisädettä eli jäyhyyssädettä  $i$  käytetään mm. nurjahdusmitoituksessa.

## Neliösäteet

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

## Neliön neliösäde

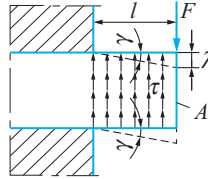
$$i = \frac{a}{2\sqrt{3}} \approx 0,29a$$

## Ympyrän neliösäde

$$i = \frac{r}{2}$$

# 4. Leikkaus

## 4.1 Leikkaus yksinään



## Leikkausjännitys

$$\tau = \frac{F}{A}$$

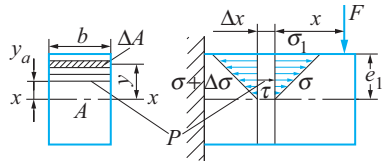
## Liukuma

$$\lambda = \frac{Fl}{GA} = \frac{l}{G} \tau \quad \text{Teräksen liukukerroin} \\ G = 0,384 \times E \approx 80 \text{ GPa}$$

## Liukukulma

$$\gamma = \frac{\lambda}{l} = \frac{\tau}{G} \quad \gamma = \text{kulma radiaaneina}$$

## 4.2 Leikkaus taivutus-tilanteessa



## Taivutusjännitys

$$\sigma = \frac{Fxy}{I_x} \quad x = F\text{:n etäisyys} \\ y = \text{etäisyys neutraaliakselista}$$

## Staattinen momentti

$$S = \sum y \Delta A$$

$S$  = tarkasteltavan jännityskohdan ( $P$ ) yläpuolisen poikkipinnan staattinen momentti neutraaliakselin suhteen

## Leikkausjännitys

$$\tau = \frac{FS}{Ib} \quad \tau = \text{etäisyydellä } y_a \\ \text{neutraaliakselista}$$

## 17.3 Koneenrakennuksessa sallittuja jännityksiä (N/mm<sup>2</sup>)

Aine		S 235	Fe 50 <sup>1)</sup>	GS 45	GRS 150	GRS 250
<b>Veto</b> (σ)	I	100 ... 150	140 ... 210	100 ... 150	35 ... 45	65 ... 85
	II	65 ... 95	90 ... 135	65 ... 95	27 ... 37	50 ... 67
	III	45 ... 70	65 ... 95	45 ... 70	20 ... 30	35 ... 50
<b>Puristus</b> (σ)	I	100 ... 150	140 ... 210	110 ... 165	85 ... 115	160 ... 215
	II	65 ... 95	90 ... 135	70 ... 105	55 ... 75	100 ... 135
	III	45 ... 70	65 ... 95	45 ... 70	20 ... 30	35 ... 50
<b>Taivutus</b> (σ)	I	110 ... 165	150 ... 220	110 ... 165	50 ... 70	100 ... 135
	II	70 ... 105	100 ... 150	70 ... 105	35 ... 50	65 ... 90
	III	50 ... 75	70 ... 105	50 ... 75	25 ... 35	40 ... 60
<b>Vääntö ja leikkaus</b> (τ)	I	65 ... 95	85 ... 125	65 ... 95	40 ... 55	75 ... 100
	II	40 ... 60	55 ... 85	40 ... 60	30 ... 40	55 ... 75
	III	30 ... 45	40 ... 60	30 ... 45	20 ... 30	35 ... 50

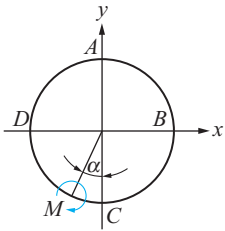
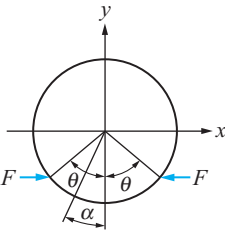
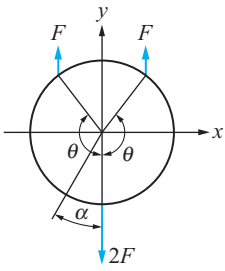
1) E 295 **Taulukossa:** I = lepäävä kuormitus, II = tykittävä kuormitus, III = vaihtuva kuormitus **Taulukon alempia arvoja** käytetään, jos laskettavassa kohdassa on lovia tai muita jännityskeskittymiä. **Valuraudan taivutusjännitysarvot** ovat voimassa suorakaiteen muotoisille poikkipinnoille. O-poikkipinnoille arvo kerrotaan 1.2:lla ja I-poikkipinnoille 0.8:lla. **Valuraudan vääntöjännitysarvot** ovat voimassa O-poikkipinnoille. Suorakaidepoikkipinnoille taulukoarvo kerrotaan 1.4:llä.

6

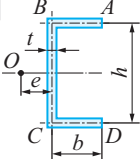
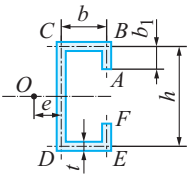
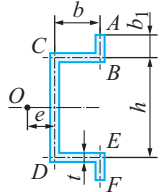
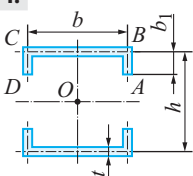
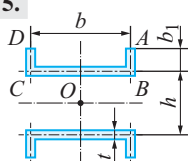
## 17.4 Suomugrafiittivaluraudan sallittuja jännityksiä (N/mm<sup>2</sup>)

Laatu		GRS 100					GRS 150					GRS 200					GRS 250				
<b>Seinämän paksuus (mm)</b>		2,5	5	10	15	20	4	10	15	20	8	20	30	40	50	15	30	40	50		
<b>Tangon halkaisija (mm)</b>		5	10	20	30	40	8	20	30	40	16	40	53	60	67	30	53	60	67		
<b>Veto</b>	I	10	25	32	27	25	27	48	43	37	26	47	40	45	44	67	60	57	56		
	II	13	18	25	22	19	21	37	34	28	20	36	35	35	34	52	46	44	44		
	III	10	13	18	16	14	16	28	25	22	15	27	26	26	25	39	35	34	33		
<b>Puristus</b>	I	42	57	80	69	62	68	120	110	93	65	120	110	110	110	170	150	140	14		
	II	26	35	49	42	38	42	74	65	57	38	72	69	68	67	100	93	88	87		
	III	10	13	18	16	14	16	28	25	22	15	27	26	26	25	39	35	34	33		
<b>Taivutus</b>	I	26	35	49	42	38	42	74	65	57	39	72	69	68	67	100	93	88	87		
	II	18	24	34	29	25	29	50	45	40	27	49	47	47	46	71	64	60	60		
	III	12	16	23	20	18	20	34	31	27	19	34	33	32	32	49	44	41	41		
<b>Leikkaus</b>	I	20	27	38	32	29	31	56	51	44	30	55	53	52	52	79	71	67	67		
	II	14	19	27	23	21	23	41	37	32	22	40	39	39	38	58	52	49	49		
	III	10	13	18	16	14	15	28	25	22	15	27	26	26	25	39	36	34	33		

## 7. Rengaskehät

	<p>Taivutusmomentit ovat positiivia kuvan mukaisesti.  <math>\delta_x</math> ja <math>\delta_y</math> = halkaisijan suureneminen x ja y suunnassa</p>
<p><b>1.</b></p> 	<p><math>0 \leq \alpha \leq \theta</math> :</p> $M(\alpha) = Fr \left[ \frac{1}{\pi} (\sin \theta - \theta \cos \theta + \theta \cos \alpha - \sin \theta \cos \theta \cos \alpha) - \cos \alpha + \cos \theta \right]$ <p><math>\theta \leq \alpha \leq \pi</math> :</p> $M(\alpha) = Fr \left[ \frac{1}{\pi} (\sin \theta - \theta \cos \theta + \theta \cos \alpha - \sin \theta \cos \theta \cos \alpha) \right]$ $M_C = \frac{2Fr}{\pi} \sin^2(\theta/2)(\theta - \pi + \sin \theta) \quad \max M = M(\theta) = \frac{Fr \sin^3 \theta}{\pi}$ $\delta_x = \frac{Fr^3}{EI} \left[ \frac{2}{\pi} (\sin \theta - \theta \cos \theta) + (\sin \theta \cos \theta - \theta) / 2 \right]$ $\delta_y = \frac{Fr^3}{EI} \left[ \frac{2}{\pi} (\sin \theta - \theta \cos \theta) + \cos \theta + \frac{\sin^2 \theta}{2} - 1 \right]$
<p><b>2.</b></p> 	<p><math>0 \leq \alpha \leq \theta</math> :</p> $M(\alpha) = Fr \left[ \frac{1}{\pi} (\theta \sin \theta + \cos \theta + \sin^2 \theta + \cos \alpha - 1) - \sin \theta + \sin \alpha \right]$ <p><math>\theta \leq \alpha \leq \pi</math> :</p> $M(\alpha) = \frac{Fr}{\pi} (\theta \sin \theta + \cos \theta + \sin^2 \theta \cos \alpha - 1)$ $M_A = \frac{Fr}{\pi} (\theta \sin \theta + \cos \theta - \sin^2 \theta - 1) \quad \max M = M_C$ $\delta_x = \frac{Fr^3}{EI} \left[ \frac{1}{2} (\sin^2 \theta + 2) + \frac{2}{\pi} (\theta \sin \theta + \cos \theta - 1) - 2 \sin \theta \right]$ $\delta_y = \frac{Fr^3}{EI} \left[ \frac{1}{2} (\sin \theta \cos \theta + \theta) + \frac{2}{\pi} (\theta \sin \theta + \cos \theta - 1) - \sin \theta \right]$

# 11. Ohuiden poikkipintojen vääntö

Poikkileikkaus	$e =$ vääntökeskiö $I_y =$ vääntöneliömomentti $I_\Phi =$ sektoriaalinen neliömomentti
<b>1.</b> 	$e = \frac{3b^2}{h+6b} \quad I_y = \frac{t^3}{3}(h+2b) \quad I_\Phi = \frac{h^2 b^3 t(2h+3b)}{12(h+6b)}$
<b>2.</b> 	$e = \frac{b(3h^2 b + 6h^2 b_1 - 8b_1^3)}{h^3 + 6h^2 b + 6h^2 b_1 + 8b_1^3 - 12hb_1^2} \quad I_y = \frac{t^3}{3}(h+2b+2b_1)$ $I_\Phi = t \cdot \left[ \frac{h^2 b^2}{2} \left( b_1 + \frac{b}{3} - e - \frac{2eb_1}{b} + \frac{2b_1^2}{h} \right) + \frac{h^2 e^2}{2} \left( b + b_1 + \frac{h}{6} - \frac{2b_1^2}{h} \right) + \frac{2b_1^3}{3} (b+e)^2 \right]$
<b>3.</b> 	$e = \frac{b(3h^2 b + 6h^2 b_1 - 8b_1^3)}{h^3 + 6h^2 b + 6h^2 b_1 + 8b_1^3 + 12hb_1^2} \quad I_y = \frac{t^3}{3}(h+2b+2b_1)$ $I_\Phi = t \cdot \left[ \frac{h^2 b^2}{2} \left( b_1 + \frac{b}{3} - e - \frac{2eb_1}{b} - \frac{2b_1^2}{h} \right) + \frac{h^2 e^2}{2} \left( b + b_1 + \frac{h}{6} - \frac{2b_1^2}{h} \right) + \frac{2b_1^3}{3} (b+e)^2 \right]$
<b>4.</b> 	$I_y = \frac{t^3}{3}(2b+4b_1)$ $I_\Phi = \frac{tb^2}{24}(8b_1^3 + 6h^2 b_1 + h^2 b + 12b_1^2 h)$
<b>5.</b> 	$I_y = \frac{t^3}{3}(2b+4b_1)$ $I_\Phi = \frac{tb^2}{24}(8b_1^3 + 6h^2 b_1 + h^2 b - 12b_1^2 h)$

Taulukko 1: Kiinteiden aineiden tiheyksiä

$$\rho = \frac{m}{V} \quad \rho = \text{tiheys (kg/dm}^3\text{)} \quad m = \text{massa (kg)} \quad V = \text{tilavuus (dm}^3\text{)}$$

Aine	$\rho$ kg/dm <sup>3</sup>	Aine	$\rho$ kg/dm <sup>3</sup>	Aine	$\rho$ kg/dm <sup>3</sup>
Akaatti	2,5...2,8	Kalkkilaasti	1,6...1,8	Lastulevy	0,4...0,8
Alumiini		Kalkkisälpä,		Lehtikulta	8,5...8,7
puhdas	2,70	kalsiitti	2,6...2,8	Liima	1,27
-juote	2,7...5,9	Kaoliini	2,2...2,6	Limoniitti	3,4...3,9
-levy	2,73	Käsijuote	11,2	Liuske	
-valu	2,56	Kattohuopa,		katto-	2,7...2,8
Antrasiitti	1,4...1,8	ruberoidi	1,1	Lumi	
Apatiitti	3,16...3,22	Kattotiili	2,6	kuohkea,	
Asbestilaatta	1,5...2,0	Keittosuola		kuiva	0,08...0,13
Asetaattisilkki	1,25...1,35	(kidemäinen)	2,1...2,2	märkä	< 0,95
Asfaltti	1,0...2,8	Keramiikka	2,1...2,3	Luu	1,7...2,0
Bakeliitti	1,3...1,4	Kiille	2,6...3,2	Lyijy	11,3
Basaltti	2,4...3,1	Kivihili	1,2...1,4	Lyijyhohde,	
Bauksiitti	2,4...2,6	Koboltti	8,9	galeniitti	7,3...7,6
Betoni		Koksi	1,0...1,7	Lyijylasi	
hiekkä	1,8...2,4	Kolofoni, hartsi	1,08	(25 % PbO)	2,89
kevyt	0,3...1,6	Konstantaani	8,9	Lyijyoksidi,	
raskas	1,9...2,8	Korkkilevy	0,20...0,35	luonnollinen	7,8...9,6
raskain	< 5,0	Korundi	3,8...4,0	Maaperä	1,3...2,0
Bitumi	1,05	Kulta	19,3	Magnesia,	
Booraksi	1,73	Kumi	0,92	magnesium-	
Duralumiini	≈ 2,8	Kupari		oksidi	3,2...3,6
Eboniitti,		elektrolyytti	8,88...8,95	Magnesium	1,74
kovakumi	1,1...1,2	puhdas	8,9...9,0	Manganiini	8,4
Elektronmetalli	1,7...1,8	lanka	8,96	Marmor	2,6...2,84
Germanium	5,33	Kvartsi	2,65	Meripihka	1,0...1,1
Grafiitti	2,0...2,5	Lasi		Messinki	8,1...8,6
Graniitti	2,6...3,0	ikkuna-	2,4...2,8	keltainen	8,5
Harmaavalu	7,2	kaluste-	2,40	punainen	8,8
Hiekka		kruunu-,		valkoinen	8,2
kuivattu	1,4...1,65	kevyt	2,2...2,7	-juote	8,1...8,7
maakostea	1,9...2,5	raskas	2,9...3,8	Mikaniitti	≈ 2,5
-kivi	1,9...2,3	kvartsi-	2,20	Molybdeeni	10,2
Hohkakivi,		lyijy-		Muovitettu	
luonnoll.	0,4...0,9	(25 % PbO)	2,89	kangas	1,3...1,4
Hopea	10,5	normaali	2,4...2,8	Nahka (kuiva)	0,9...1,0
-juote	8,27...9,18	pii-,		Natriumkloridi	2,17
Hostaflon	2,1...2,2	kevyt	2,5...3,2	Nikkeli	8,90
Invarteräs	8,0...8,1	raskas	3,5...5,9	Nikkeliini	8,77
Iridium	22,4	-pullo	2,6	Norsunluu	1,8...1,9
Jää (0 °C)	0,917	Lasivilla	0,1...0,3	Paperi	0,7...1,2

Jatkuu...

Taulukko 83: Mesonit

Hiukkanen	Koostumus	Massa	Spin	Outous	$l, l_3$	$\Delta t / \Delta E$
$\pi^+$	$u\bar{d}$	140	$0^-$	0	1, +1	$2,6 \cdot 10^{-8}$ s
$\pi^0$	$(u\bar{u} - d\bar{d}) / \sqrt{2}$	135	$0^-$	0	1, 0	$8,4 \cdot 10^{-17}$ s
$\pi^-$	$d\bar{u}$	140	$0^-$	0	1, -1	$2,6 \cdot 10^{-8}$ s
$K^+$	$u\bar{s}$	494	$0^-$	+1	1/2, +1/2	$1,2 \cdot 10^{-8}$ s
$K_S^0$	$d\bar{s}, s\bar{d}$	498	$0^-$	mix	1/2, mix	$8,9 \cdot 10^{-11}$ s
$K_L^0$	$d\bar{s}, s\bar{d}$	498	$0^-$	mix	1/2, mix	$5,2 \cdot 10^{-8}$ s
$K^-$	$s\bar{u}$	494	$0^-$	-1	1/2, -1/2	$1,2 \cdot 10^{-8}$ s
$\rho^+$	$u\bar{d}$	776	$1^-$	0	1, +1	151 MeV
$\rho^0$	$(u\bar{u} - d\bar{d}) / \sqrt{2}$	776	$1^-$	0	1, 0	151 MeV
$\rho^-$	$d\bar{u}$	776	$1^-$	0	1, -1	151 MeV
$K^{*+}$	$u\bar{s}$	892	$1^-$	+1	1/2, +1/2	50 MeV
$K^{*0}$	$d\bar{s}$	896	$1^-$	+1	1/2, -1/2	51 MeV
$\bar{K}^{*0}$	$s\bar{d}$	896	$1^-$	-1	1/2, +1/2	51 MeV
$K^{*-}$	$s\bar{u}$	892	$1^-$	-1	1/2, -1/2	50 MeV

Taulukko 84: Baryonit

Hiukkanen	Koostumus	Massa	Spin	Outous	$l, l_3$	$\Delta t / \Delta E$
p	uud	938	$1/2^+$	0	1/2, +1/2	$> 10^{31}$ a
n	udd	940	$1/2^+$	0	1/2, -1/2	889 s
$\Sigma^+$	uus	1189	$1/2^+$	-1	1, +1	$8,0 \cdot 10^{-11}$ s
$\Sigma^0$	uds	1193	$1/2^+$	-1	1, 0	$7,4 \cdot 10^{-20}$ s
$\Sigma^-$	dds	1197	$1/2^+$	-1	1, -1	$1,4 \cdot 10^{-10}$ s
$\Lambda^0$	uds	1116	$1/2^+$	-1	0, 0	$2,6 \cdot 10^{-10}$ s
$\Xi^0$	uss	1315	$1/2^+$	-2	1/2, +1/2	$2,9 \cdot 10^{-10}$ s
$\Xi^-$	dss	1321	$1/2^+$	-2	1/2, -1/2	$1,6 \cdot 10^{-10}$ s
$\Delta^{++}$	uuu	1232	$3/2^+$	0	3/2, +3/2	120 MeV
$\Delta^+$	uud	1232	$3/2^+$	0	3/2, +1/2	120 MeV
$\Delta^0$	udd	1232	$3/2^+$	0	3/2, -1/2	120 MeV
$\Delta^-$	ddd	1232	$3/2^+$	0	3/2, -3/2	120 MeV
$\Sigma^{*+}$	uus	1383	$3/2^+$	-1	1, +1	$\approx 40$ MeV
$\Sigma^{*0}$	uds	1384	$3/2^+$	-1	1, 0	$\approx 40$ MeV
$\Sigma^{*-}$	dds	1387	$3/2^+$	-1	1, -1	$\approx 40$ MeV
$\Xi^{*0}$	uss	1532	$3/2^+$	-2	1/2, +1/2	$\approx 10$ MeV
$\Xi^{*-}$	dss	1535	$3/2^+$	-2	1/2, -1/2	$\approx 10$ MeV
$\Omega^-$	sss	1672	$3/2^+$	-3	0, 0	$8,2 \cdot 10^{-11}$ s



Jos tähti ( \* ) -merkkintä on solun vasemmassa reunassa tai sulkeissa tekstin yhteydessä, merkkintää ei ole standardoitu, mutta sitä käytetään yleisesti.

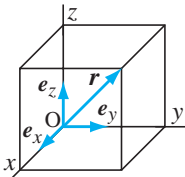
Todennäköisyytlaskenta	
Merkintä	Sanallinen vastine ja huomautuksia
$\overline{A}$	tapahtuman $A$ komplementti-tapahtuma; myös: $A^c$
* $P(A)$	$A$ :n todennäköisyys
* $P(A B)$	$A$ :n todennäköisyys ehdolla $B$
* $X$	satunnaismuuttuja; vaihtoehto: $\underline{x}$
* $Md$	mediaani
* $Mo$	moodi eli tyyppiarvo
* $E(X)$	satunnaismuuttujan $X$ odotusarvo; vaihtoehto: $E\underline{x}$ , $\mu$ , $m$ ; fysiikassa: $\langle x \rangle$
* $D(X)$	satunnaismuuttujan $X$ keskihajonta; vaihtoehto: $D\underline{x}$ , $\sigma$ , $s$
* $D^2(X)$	$X$ :n varianssi; vaihtoehto: $D^2\underline{x}$ , $\sigma^2$ , $s^2$
* $N(\mu, \sigma)$	normaalijakauma parametrein $\mu$ ja $\sigma$
* $N(0, 1)$	normitettu normaalijakauma
* $\varphi$	normitetun normaalijakauman tiheysfunktio
* $\Phi$	normitetun normaalijakauman kertymäfunktio

Geometrian perusteet	
$AB \parallel CD$ $AB \parallel\!\!\! / CD$ $g \parallel h$	suora $AB$ on yhdensuuntainen suoran $CD$ kanssa; $g$ ja $h$ ovat suoria
* $a \parallel b$ $\tau \parallel \sigma$	vektorit $a$ ja $b$ sekä tasot $\tau$ ja $\sigma$ yhdensuuntaisia
* $AB \not\parallel CD$ $g \not\parallel h$	suorat erisuuntaisia
* $a \not\parallel b$ $\tau \not\parallel \sigma$	vektorit $a$ ja $b$ sekä tasot $\tau$ ja $\sigma$ erisuuntaisia
$AB \perp CD$ $g \perp h$	suora $AB$ on kohtisuorassa suoraan $CD$ vastaan; suorien leikattava toisensa tasolla
* $a \perp b$ $\tau \perp \sigma$	vektorit $a$ ja $b$ sekä tasot $\tau$ ja $\sigma$ kohtisuoria
$\sphericalangle ABC$	kolmion $ABC$ kärjen $B$ kulma; kulma ei ole suunnattu, jolloin $\sphericalangle ABC = \sphericalangle CBA$ ja $0 \leq \sphericalangle ABC \leq \pi$ rad
* $\sphericalangle(a, b)$ $\sphericalangle(a, b)$	vektorien $a$ ja $b$ välinen kulma
$\overline{AB}$	jana pisteestä $A$ pisteeseen $B$
$\mathbf{AB}$	vektori pisteestä $A$ pisteeseen $B$
$d(A, B)$	pisteiden $A$ ja $B$ välinen etäisyys; etäisyys on janan $\overline{AB}$ pituus ja vektorin $\mathbf{AB}$ pituus
* $\perp$	suorakulma; käyttö kuvioissa
* $\triangle ABC$	kolmio, jonka kärkipisteet ovat $A, B$ ja $C$
* $A \cong B$	kuviot $A$ ja $B$ yhtenevät
* $A \sim B$	kuviot $A$ ja $B$ yhdenmuotoiset

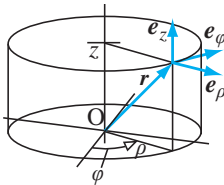
aste $A$	matriisin $A$ aste
$\text{tr } A$	neliömatriisin $A$ jälki; $\text{tr } A = \sum_i (A)_{ii}$
$\ A\ $	matriisin $A$ normi

### Koordinaattijärjestelmät

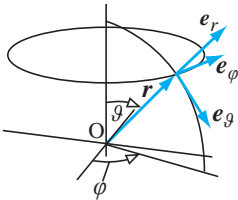
On tärkeää erottaa toisistaan vektorin  $a$  komponentit (vektorin koordinaatit) kantavektoreista eli suureen arvot  $a_x, a_y$  ja  $a_z$  "komponenttivektoreista"  $a_x e_x, a_y e_y$  ja  $a_z e_z$ .



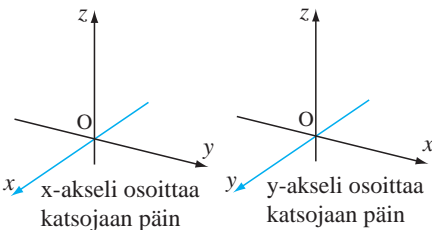
**Kuva 1:** Oikeakätinen suorakulmainen koordinaatisto



**Kuva 2:** Oikeakätinen sylinterikoordinaatisto



**Kuva 3:** Oikeakätinen pallokoordinaatisto



**Kuva 4:** Oikeakätinen koordinaatisto

**Kuva 5:** Vasenkätinen koordinaatisto

**Huom!** Jos oikeakätisen järjestelmän (kuva 4) sijaan käytetään poikkeuksellisesti vasenkätistä järjestelmää (kuva 5), tämä on ilmeistä selvästi merkkivirheiden välttämiseksi.

$x, y, z$	$r = x e_x + y e_y + z e_z$ $dr = dx e_x + dy e_y + dz e_z$ ; suorakulmaiset koordinaatit; koordinaatteja merkitään myös $x_1, x_2, x_3$ ja kantavektoreita $e_1, e_2, e_3$ ; yksikkövektorit $e_x, e_y, e_z$ muodostavat oikeakätisen ortonormaalien järjestelmän (kuvat 1 ja 4); kantavektoreita merkitään myös $i, j, k$
$\rho, \varphi, z$	$r = \rho e_\rho + z e_z$ $dr = d\rho e_\rho + \rho d\varphi e_\varphi + dz e_z$ ; sylinterikoordinaatit; yksikkövektorit $e_\rho(\varphi), e_\varphi(\varphi), e_z$ muodostavat oikeakätisen järjestelmän (kuva 2); jos $z = 0$ , niin $\rho$ ja $\varphi$ ovat napakoordinaatteja
$r, \vartheta, \varphi$	$r = r e_r$ $dr = dr e_r + r d\vartheta e_\vartheta + r \sin\vartheta d\varphi e_\varphi$ ; pallokoordinaatit; yksikkövektorit $e_r(\vartheta, \varphi), e_\vartheta(\vartheta, \varphi), e_\varphi(\vartheta, \varphi)$ muodostavat oikeakätisen järjestelmän (kuva 3)

### Skalaarit ja vektorit

$a$	vektori $a$ ; merkintää $\vec{a}$ ei ole enää uudessa standardissa, käytetään kuitenkin vielä yleisesti
$a + b$	vektoreiden $a$ ja $b$ summa; $(a + b)_i = a_i + b_i$
$xa$	luvun, skalaarin tai komponentin $x$ ja vektorin $a$ tulo; $(xa)_i = x a_i$
$ a $ $a$ $\ a\ $	vektorin $a$ pituus; vektorin $a$ normi; $ a  = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$
$0$ $\vec{0}$	nollavektori; nollavektorin pituus on 0

# 1. SI-järjestelmä

## 1.1 Perusyksiköt

Suure		Yksikkö	
Nimi	Tunnus	Nimi	Tunnus
pituus	$l, s$	metri	m
massa	$m$	kilogramma	kg
aika	$t$	sekunti	s
sähkövirta	$I$	ampeeri	A
lämpötila	$T$	kelvin	K
ainemäärä	$n$	mooli	mol
valovoima	$I$	kandela	cd

## 1.2 SI-yksikköjen etuliitteet

Kerroin	Etuliite	
	Nimi	Tunnus
$10^{24}$	jotta	Y
$10^{21}$	tsetta	Z
$10^{18}$	eksa	E
$10^{15}$	peta	P
$10^{12}$	tera	T
$10^9$	giga	G
$10^6$	mega	M
$10^3$	kilo	k
$10^2$	hehto	h
$10^1$	deka	da
$10^{-1}$	desi	d
$10^{-2}$	sentti	c
$10^{-3}$	milli	m
$10^{-6}$	mikro	$\mu$
$10^{-9}$	nano	n
$10^{-12}$	piko	p
$10^{-15}$	femto	f
$10^{-18}$	atto	a
$10^{-21}$	tsepto	z
$10^{-24}$	jokto	y

## 1.3 SI-yksiköiden kanssa käytettyjä yksiköitä

Suure	Yksikkö		
	Nimi	Tunnus	Määritelmä
<b>aika</b>			
minuutti	min	1 min = 60 s	
tunti	h	1 h = 60 min	
vuorokausi	d	1 d = 24 h	
<b>tasokulma</b>			
aste	°	1° = ( $\pi/180$ ) rad	
minuutti	'	1' = (1/60)°	
sekunti	"	1" = (1/60)'	
<b>tilavuus</b>			
litra	l, L	1 l = 1 dm <sup>3</sup>	
<b>massa</b>			
tonni	t	1 t = 10 <sup>3</sup> kg	
<b>paine</b>			
baari	bar	1 bar = 10 <sup>5</sup> Pa = 0,1 MPa	
<b>taso</b>			
neperi	Np	1 Np = ln e = 1	
beli	B	B = (1/2) ln 10 Np ≈ 1,151 293	
<b>energia</b>			
elektronivoltti	eV	1 eV ≈ 1,602 177 × 10 <sup>-19</sup> J	
(saatu ko-keellisesti)		Elektronivoltti on liike-energia, jonka elektroni saa läpäistessään tyhjiössä voltin suuruisen potentiaalieron	
<b>massa</b>			
dalton <sup>1)</sup>	Da <sup>1)</sup>	1 Da ≈ 1,660 539 × 10 <sup>-27</sup> kg	
(saatu ko-keellisesti)		1/12 levossa perustilassa olevan <sup>12</sup> C-hiiliatomin massasta	
<b>pituus</b>			
astronomi- nen yksikkö	ua <sup>2)</sup>	1 ua = 1,495 978 706 91(6) · 10 <sup>11</sup> m	
		Sovittu arvo, auringon ja maan etäisyyden keskiarvo	

<sup>1)</sup> Daltonin aikaisempi nimi oli atomimassayksikkö, jonka tunnus on u.

<sup>2)</sup> Yksikön tunnus aikaisemmin AU. Uusi yksikkö ua on otettu käyttöön (2010/10).

Suure	Tunnus	Yksikkö
<b>Jaksolliset ilmiöt</b>		
jaksonaika	$T$	s
aikavakio	$\tau, (T)$	s
taajuus	$f, \nu$	Hz
pyörimisnopeus, kierrostaajuus	$n$	$s^{-1}$
kulmataajuus	$\omega$	$s^{-1}$
aallonpituus	$\lambda$	m
aaltotiheys, aaltoluku	$\sigma$	$m^{-1}$
kulma-aaltotiheys, kulma-aaltoluku	$k$	$m^{-1}$ rad/m
vaimennuskerroin	$\delta$	$s^{-1}$
logaritminen vaimennussuhde, logaritminen dekrementti	$\Lambda$	(Np/S)
(matka) vaimennuskerroin, heikennyskerroin	$\alpha$	$m^{-1}$
vaihekerroin	$\beta$	$m^{-1}$
etenemiskerroin	$\gamma$	$m^{-1}$
<b>Mekaniikka</b>		
massa	$m$	kg
tiheys	$\rho$	$kg/m^3$
suhteellinen tiheys	$d$	–
ominaistilavuus	$\nu$	$m^3/kg$
pituusmassa	$\rho_l$	$kg/m$
pinta-alamassa	$\rho_A$	$kg/m^2$
liikemäärä	$p$	$kg \cdot m/s$
impulssi	$I$	$N \cdot s$
impulssimomentti	$H$	$N \cdot m \cdot s$
liikemäärämomentti	$L$	$kg \cdot m^2/s$
hitausmomentti	$I, J$	$kg \cdot m^2$
voima	$F$	N
painovoima	$G, (P, W)$	N
gravitaatiovakio	$G, (f)$	$N \cdot m^2/kg^2$

Suure	Tunnus	Yksikkö
taivutusmomentti	$M$	$N \cdot m$
vääntömomentti	$T$	$N \cdot m$
paine	$p$	Pa
dynaaminen paine	$p_{dyn}$	Pa
absoluuttinen paine	$p_{abs}$	Pa
ylipaine	$p_e$	Pa
normaalijännitys	$\sigma$	Pa
leikkausjännitys	$\tau$	Pa
suhteellinen venymä	$\varepsilon$	–
liukukulma	$\gamma$	rad
Poissonin luku	$\mu, \nu$	–
kimmokerroin	$E$	Pa
liukukerroin	$G$	Pa
puristuskerroin	$K$	Pa
puristuvuus (kokoonpuristuvuus)	$\kappa$	$Pa^{-1}$
aksaalinen neliömomentti	$I_a, I$	$m^4$
polaarinen neliömomentti	$I_p$	$m^4$
vastusmomentti	$Z, W$	$m^3$
kitkakerroin	$\mu, (f)$	–
dynaaminen viskositeetti	$\eta, (\mu)$	$Pa \cdot s$
kinemaattinen viskositeetti	$\nu$	$m^2/s$
pintajännitys	$\gamma, \sigma$	N/m
työ	$W$	J
energia	$E$	J
potentiaalienergia, asemaenergia	$E_p, V$	J
liike-energia, kineettinen energia	$E_k, K$	J
teho	$P$	W
hyötösuhde	$\eta$	–
massavirta	$q_m$	$kg/s$
tilavuusvirta	$q_V$	$m^3/s$